

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (PD) adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat/orde tertinggi dari turunan yang terdapat pada suatu persamaan. Secara umum persamaan diferensial biasa orde  $n$  dapat dinyatakan sebagai

$$f(t, y, Dy, D^2y, \dots, D^ny) = 0,$$

dengan  $t$  adalah variabel bebas,  $y(t)$  adalah variabel tak bebas dan operator  $D = \frac{d}{dt}$ . Persamaan diferensial biasa orde  $n$  disebut linear apabila memenuhi bentuk umum

$$a_0(t)D^ny + a_1(t)D^{n-1}y + \dots + a_n(t)y = b(t) \quad (2.1)$$

dengan  $a_0 \neq 0$ ,  $t$  adalah variabel bebas dan  $y$  adalah variabel tak bebas. Pada persamaan (2.1)  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$  merupakan koefisien dan  $b(t)$  disebut bagian nonhomogen. Jika  $b(t) = 0$  maka persamaan (2.1) merupakan persamaan homogen dan jika  $b(t) \neq 0$ , maka persamaan (2.1) merupakan persamaan nonhomogen. Persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya. Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi  $n$  adalah suatu sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan diferensial biasa dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui

dan  $n$  merupakan bilangan bulat positif lebih dari satu. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi  $n$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Dy_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n; t), \\ Dy_2 &= f_2(y_1, \dots, y_n; t), \\ &\vdots \\ Dy_n &= f_n(y_1, \dots, y_n; t), \end{aligned}$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi dari  $n + 1$  variabel, untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $n \geq 2$  (Boyce dan Diprima, 2012).

## 2.2 Kalkulus Fraksional

Persamaan diferensial fraksional adalah persamaan yang memuat turunan fraksional. Turunan fraksional dari fungsi  $y$  dapat didefinisikan sebagai  $\frac{d^n y}{dx^n}$  dengan  $n$  bilangan rasional. Terdapat beberapa ilmuwan yang menotasikan turunan fraksional dengan definisi mereka masing-masing. Pada tahun 1819, Lacroix menjadi ilmuwan pertama yang mendefinisikan turunan fraksional (Kimeu, 2009). Misalkan  $y = x^m$ , dengan  $m$  adalah bilangan bulat positif. Lacroix menotasikan turunan ke- $n$  dari fungsi  $y$  sebagai

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (2.2)$$

$m \geq n$  dengan  $n$  bilangan rasional.

Fungsi dasar yang paling penting pada kalkulus fraksional adalah fungsi Gamma yang disimbolkan dengan  $\Gamma(z)$ . Apabila  $z$  bilangan bulat, fungsi Gamma  $\Gamma(z)$  didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{N}.$$

Apabila  $z$  bukan bilangan bulat, fungsi Gamma  $\Gamma(z)$  didefinisikan sebagai (Podlubny, 1999)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R}^+.$$

### Definisi 2.2.1 (Fungsi Beta)

Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Fungsi Beta juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi Gamma (Kimeu, 2009)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Pendekatan yang paling sering digunakan untuk mendefinisikan kalkulus fraksional, yaitu Riemann–Liouville, Caputo dan Grunwald-Letnikov.

### Definisi 2.2.2 (Integral Fraksional Riemann-Liouville)

Misalkan  $z \in \mathbb{R}^+$  dan  $L_1[a, b]$  merupakan fungsi yang terintegral *Lebesgue* pada selang  $[a, b]$  dengan  $a < b < \infty$ , didefinisikan operator  $I_a^z$  pada  $L_1[a, b]$  sebagai

$$I_a^z f(t) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_a^t (t-s)^{z-1} f(s) ds,$$

untuk  $a \leq t \leq b$  dan  $\Gamma(z)$  merupakan fungsi Gamma.  $I_a^z$  disebut operator integral fraksional Riemann-Liouville orde  $z$ . Untuk kondisi  $z = 0$ ,  $I_a^z f(t) = f(t) = I$  disebut sebagai operator identitas (Diethelm, 2010).

### Definisi 2.2.3 (Turunan Fraksional Riemann-Liouville)

Turunan fraksional Riemann-Liouville orde  $\alpha$  didefinisikan sebagai berikut

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f(s) ds,$$

dengan  $n-1 < \alpha < n$ , dimana  $a$  dan  $t$  operasi limit dari  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$  (Petras, 2011).

Contoh turunan fraksional  $f(t) = t^p$  dengan  $p > 0$  dan  $0 < \alpha < 1$  adalah

$${}^{RL}D_t^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-1-\alpha} s^p ds,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t s^p t^{n-1-\alpha} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-1-\alpha} ds,$$

dengan memisalkan  $\lambda = \frac{s}{t}$  diperoleh

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{n-1-\alpha} d\lambda, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) B(p+1, n-\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} t^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} t^{p-\alpha} \end{aligned}$$

dimana  $B(p+1, n-\alpha)$  adalah fungsi Beta dengan

$$B(p+1, n-\alpha) = \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{n-1-\alpha} d\lambda = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)}$$

dan

$$\frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) = \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} t^{p-\alpha}$$

untuk setiap  $p \in \mathbb{R}$  dan  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Definisi 2.2.4 (Turunan Fraksional Caputo)

Turunan fraksional Caputo dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= I_t^{n-\alpha} D_t^n f(t), \quad n = 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(s) ds, \end{aligned}$$

dengan  $n-1 < \alpha < n$  (Petras, 2011).

Relasi antara turunan fraksional Riemann-Liouville dan Caputo dapat dituliskan sebagai berikut (Petras, 2011)

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).$$

### 2.2.5 Pendekatan Grunwald-Letnikov

Misalkan  $u(t)$  adalah fungsi yang kontinu. Turunan pertama  $u(t)$  didefinisikan sebagai

$$\frac{du}{dt} = u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{u(t) - u(t-h)}{h} \right).$$

Sedangkan turunan kedua dari  $u(t)$  yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} = u''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{u'(t) - u'(t-h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{u(t) - u(t-h)}{h} - \frac{u(t-h) - u(t-2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) - 2u(t-h) + u(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

Dari turunan pertama dan kedua diperoleh turunan ketiga dari fungsi  $u(t)$  yaitu

$$\frac{d^3u}{dt^3} = u'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) - 3u(t-h) + 3u(t-2h) - u(t-3h)}{h^3}.$$

Berdasarkan turunan pertama, kedua dan ketiga bentuk umum turunan ke- $n$  fungsi  $u(t)$  terhadap  $t$  dimana  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j > n$  adalah

$$\frac{d^nu}{dt^n} = u^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} u(t-jh),$$

dengan

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!},$$

merupakan koefisien binomial. Bentuk umum turunan ke- $n$  diperluas ke dalam turunan fraksional  $u(t)$  terhadap  $t$  dengan orde  $\alpha$  sebagai berikut:

$${}^{GL}D_t^\alpha u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u(t-jh),$$

dimana  $\alpha \in \mathbb{R}$  dan koefisien binomial  $\binom{\alpha}{j}$  untuk turunan orde fraksional menggunakan relasi fungsi Gamma berikut

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\alpha - j + 1)}.$$

(Petras, 2011)

Pendekatan Grunwald-Letnikov untuk turunan Caputo diperoleh dari hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo. Jika  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = t_0 + (m + 1)h = t$  untuk setiap  $m \geq 0$  pada selang  $[0, t]$  dan

$${}^{RL}D_t^\alpha u(t) = {}^{GL}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u_{m+1-j} + O(h),$$

maka pendekatan Grunwald-Letnikov untuk turunan Caputo dengan  $0 < \alpha < 1$  dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}^CD_t^\alpha u(t) &= {}^{RL}D_t^\alpha u(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u_{m+1-j} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0. \end{aligned}$$

(Scherer,dkk., 2011)

Misalkan  ${}^CD_t^\alpha u(t) = f(t, u)$  diperoleh

$$\begin{aligned} f(t, u) &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u_{m+1-j} - \frac{((m+1)h)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0, \\ h^\alpha f(t_m, u_m) &= u_{m+1} + \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u_{m+1-j} - \frac{((m+1)h)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0, \\ u_{m+1} &= h^\alpha f(t_m, u_m) - \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u_{m+1-j} - \frac{((m+1)h)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(Arenas,dkk., 2016)

## 2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik dibagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$D\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \text{ dengan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik diskrit dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood,dkk., 2000)

### 2.3.1 Sistem Otonomus Fraksional

Sistem persamaan diferensial fraksional dinotasikan dengan operator  ${}^C D_t^\alpha$  yang merupakan turunan Caputo. Sistem otonomus fraksional adalah suatu sistem persamaan diferensial fraksional orde  $\alpha$  yang berbentuk,

$$D^\alpha \vec{x} = f(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (2.4)$$

dengan  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , dan  $0 < \alpha \leq 1$  (Petras, 2011).

#### Definisi 2.3.1 (Titik Kesetimbangan)

Pandang sistem (2.4) sebagai sistem otonomus fraksional. Titik kesetimbangan pada sistem (2.4) diperoleh dengan menyelesaikan solusi persamaan berikut

$$f(\vec{x}(t)) = 0, \quad (2.5)$$

dan diperoleh  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari sistem (2.4) (Petras,2011).

### Definisi 2.3.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  pada sistem diferensial fraksional (2.4) dikatakan

- a. **Stabil**, jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga solusi masalah nilai awal yang terdiri atas sistem diferensial (2.4) pada saat  $t = 0$  dan kondisi awal  $x(0) = x_0$  memenuhi

$$[x_1(0) - x_1^*]^2 + [x_2(0) - x_2^*]^2 + \dots + [x_n(0) - x_n^*]^2 < \delta$$

$$\text{maka berlaku } [x_1(t) - x_1^*]^2 + [x_2(t) - x_2^*]^2 + \dots + [x_n(t) - x_n^*]^2 < \varepsilon$$

untuk setiap  $t > 0$ .

- b. **Stabil asimtotik**, jika stabil dan terdapat bilangan  $\delta_0 > 0$  dengan  $0 < \delta_0 < \delta$  sedemikian sehingga suatu penyelesaian sistem diferensial fraksional (2.4) pada saat  $t = 0$  memenuhi

$$[x_1(0) - x_1^*]^2 + [x_2(0) - x_2^*]^2 + \dots + [x_n(0) - x_n^*]^2 < \delta_0$$

untuk setiap  $t > 0$ , maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

(Diethelm, 2010)

Solusi dari sistem persamaan diferensial fraksional (2.4) merupakan suatu fungsi Mittag-Leffler yang didefinisikan sebagai berikut.

### Definisi 2.3.3 (Fungsi Mittag-Leffler)

Misalkan  $\alpha > 0$ , fungsi  $E_\alpha$  didefinisikan sebagai berikut

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\alpha + 1)}.$$

Apabila deret tersebut konvergen maka  $E_\alpha(z)$  disebut fungsi Mittag-Leffler orde  $\alpha$  (Diethelm, 2010).

Adapun perilaku solusi dan konvergensi dari fungsi Mittag-Leffler, disajikan pada Teorema 2.3.1 sebagai berikut.



### Teorema 2.3.1 (Konvergensi fungsi Mittag-Leffler)

Misalkan  $\alpha > 0$  dan  $\lambda = re^{i\theta}$  dengan  $r = |\lambda|, \theta = \arg(\lambda)$ . Perilaku solusi fungsi Mittag-Leffler  $E_\alpha(\lambda)$  sebagai berikut

1.  $E_\alpha(re^{i\theta}) \rightarrow 0$  untuk  $r \rightarrow \infty$  jika  $\arg(\lambda) = |\theta| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ,
2.  $E_\alpha(re^{i\theta})$  terbatas untuk  $r \rightarrow \infty$  jika  $\arg(\lambda) = |\theta| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ,
3.  $E_\alpha(re^{i\theta}) \rightarrow \infty$  untuk  $r \rightarrow \infty$  jika  $\arg(\lambda) = |\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}$ ,

(Diethelm, 2010).

### 2.3.2 Sistem Otonomus Linear Fraksional

Sistem persamaan diferensial fraksional linear berdimensi  $n$  dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \vec{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ D_t^\alpha \vec{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ &\vdots \\ D_t^\alpha \vec{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan  $0 < \alpha < 1$ . Sistem persamaan (2.6) dapat dinyatakan sebagai

$$D_t^\alpha \vec{x}(t) = A\vec{x}(t),$$

dengan  $\vec{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  dan  $A$  adalah matriks koefisien sistem (2.6), yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Titik kesetimbangan sistem persamaan (2.6) adalah  $\vec{x}^* = (0, 0, \dots, 0)$ .

Misalkan diberikan sistem dua dimensi sebagai berikut

$$D_t^\alpha x_1(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (2.7)$$

$$D_t^\alpha x_2(t) = a_3x_1(t) + a_4x_2(t)$$

dengan  $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , dan  $0 < \alpha < 1$ . Titik kesetimbangan diperoleh ketika

$$D_t^\alpha x_1(t) = D_t^\alpha x_2(t) = 0,$$

atau

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} = \vec{0},$$

dan diperoleh titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$  dengan syarat  $\det(A) \neq 0$ .

Selanjutnya diperoleh

$$B^{-1}AB = D,$$

dengan  $D$  adalah matriks diagonal dari  $A$ , yaitu

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  dan  $B$  adalah vektor eigen matriks  $A$ .

Solusi sistem persamaan fraksional dua dimensi tersebut diperoleh dari fungsi Mittag-Leffler. Misal  $\alpha > 0$  dan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , selain itu didefinisikan

$$D_t^\alpha \vec{x}(t) = A\vec{x}(t),$$

maka

$$\vec{x}(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), t \geq 0.$$

(Odibat,2010).

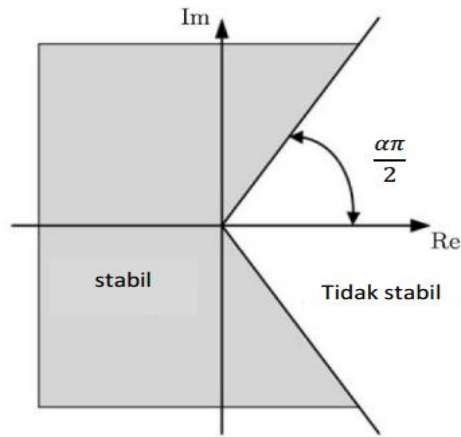
Solusi dari sistem persamaan otonomus fraksional linear (2.7) mengikuti konvergensi dari fungsi Mittag-Leffler pada Teorema 2.3.1, sehingga kestabilan sistem otonomus fraksional linear ditunjukkan pada teorema berikut.

### **Teroema 2.3.2 (Kestabilan lokal Sistem Linear fraksional)**

Kestabilan titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  sistem linear fraksional mengikuti konvergensi dari fungsi Mittag-Leffler antara lain sebagai berikut

1. Jika  $\arg(\lambda) > \frac{\alpha\pi}{2}$  maka  $\vec{x}^*$  stabil asimtotik,
2. Jika  $\arg(\lambda) = \frac{\alpha\pi}{2}$  maka  $\vec{x}^*$  stabil,
3. Jika  $\arg(\lambda) < \frac{\alpha\pi}{2}$  maka  $\vec{x}^*$  tidak stabil.

Daerah kestabilan sistem (2.4) ditunjukkan pada Gambar 2.1.



**Gambar 2.1** Daerah kestabilan sistem persamaan diferensial orde fraksional dengan  $0 < \alpha < 1$ .

(Petras, 2011)

### 2.3.3 Kriteria Routh-Hurwitz Orde Fraksional

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  dari sistem otonomus fraksional dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua akar persamaan karakteristik dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ :

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.8)$$

memenuhi

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (2.9)$$

dengan semua koefisien pada (2.8) riil. Pada kasus  $n = 3$ , persamaan karakteristik (2.8) dapat ditulis sebagai

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut didefinisikan diskriminan dari polinomial  $P(\lambda)$  yang dinotasikan dengan  $D(P)$  yaitu

$$\begin{aligned} D(P) &= - \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3a_1^3 - 4a_2^3 - 27a_3^3. \end{aligned}$$

Misalkan  $\vec{x}^*$  berada di  $\mathbb{R}_+^2$ . Kestabilan titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  dinyatakan dalam proposisi berikut ini

**Proposisi 2.3.1**

1. Jika  $D(P) > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_1 a_2 > a_3$  maka  $\vec{x}^*$  stabil asimtotik lokal.
2. Jika  $D(P) < 0$ ,  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 \geq 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $\alpha < \frac{2}{3}$  maka  $\vec{x}^*$  stabil asimtotik lokal dan jika  $D(P) < 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $\alpha > \frac{2}{3}$  maka  $\vec{x}^*$  tidak stabil.
3. Jika  $D(P) < 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 a_2 = a_3$ , maka  $\vec{x}^*$  stabil asimtotik lokal untuk semua  $\alpha \in [0,1)$

Bukti dapat dilihat pada (Ahmed,dkk., 2006).

**2.3.4 Sistem Otonomus Nonlinear Fraksional**

Perhatikan sistem dua dimensi nonlinear berikut

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f(x, y), \\ D^\alpha y(t) &= g(x, y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan  $\alpha \in (0,1]$  dan nilai awal  $x(0) = x_0$  dan  $y(0) = y_0$ . Misalkan  $(x^*, y^*)$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.10). Titik kesetimbangan sistem (2.10) dapat ditentukan dengan menyelesaikan  $f(x, y) = 0$  dan  $g(x, y) = 0$ . Untuk mengevaluasi kestabilan lokal titik kesetimbangan, dimisalkan

$$\begin{aligned} x(t) &= x^* + \varepsilon_1(t), \\ y(t) &= y^* + \varepsilon_2(t), \\ D^\alpha(x^* + \varepsilon_1) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^\alpha(y^* + \varepsilon_2) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} D^\alpha \varepsilon_1(t) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^\alpha \varepsilon_2(t) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

Deret Taylor fungsi  $f$  dan  $g$  di sekitar  $(x^*, y^*)$  adalah

$$f(x, y) \cong f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 + \eta_1(x, y)$$

$$g(x, y) \cong g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 + \eta_2(x, y)$$

dengan  $\eta_1(x, y)$  dan  $\eta_2(x, y)$  adalah suku sisa, yang memenuhi sifat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

Jika  $(x, y)$  berada cukup dekat dengan  $(x^*, y^*)$  maka  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  bernilai kecil sehingga diperoleh persamaan berikut

$$f(x, y) \cong \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2,$$

$$g(x, y) \cong \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2,$$

dengan  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ , sehingga

$$D^\alpha \varepsilon_1(t) \cong \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2,$$

$$D^\alpha \varepsilon_2(t) \cong \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2,$$

dan didapatkan sistem

$$D^\alpha \vec{\varepsilon} = J \vec{\varepsilon},$$

dengan nilai awal  $\varepsilon_1(0) = x(0) - x^*, \varepsilon_2(0) = y(0) - y^*, \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$  dan

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

disebut matriks Jacobi yang dinotasikan dengan  $J(x^*, y^*)$ . Kemudian diperoleh

$$B^{-1}JB = D,$$

dengan  $D$  adalah matriks diagonal dari  $J$ , yaitu  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .  $\lambda_1, \lambda_2$  adalah nilai eigen matriks  $J$ . Matriks  $B$  adalah matriks  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  dengan  $\vec{v}_1$  dan  $\vec{v}_2$  merupakan vektor-vektor eigen yang berkaitan dengan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dari matriks  $J$ , sehingga

$$JB = BC,$$

$$J = BCB^{-1},$$

akibatnya,

$$D^\alpha \vec{\varepsilon} = (BCB^{-1})\vec{\varepsilon},$$

$$D^\alpha (B^{-1}\vec{\varepsilon}) = C(B^{-1})\vec{\varepsilon},$$

sehingga diperoleh,

$$D^\alpha \vec{\zeta} = C\vec{\zeta}, \quad \vec{\zeta} = B^{-1}\vec{\varepsilon}, \quad \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Sistem otonomus nonlinear (2.10) dapat dihampiri oleh sistem berikut

$$D^\alpha \zeta_1 = \lambda_1 \zeta_1,$$

$$D^\alpha \zeta_2 = \lambda_2 \zeta_2, \tag{2.11}$$

Solusi persamaan (2.11) berbentuk fungsi Mittag-Leffler  $\vec{\zeta} = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$  dengan  $\alpha > 0$  dan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sehingga  $D^\alpha \vec{\zeta} = \lambda \vec{\zeta}$  (Ahmed, dkk., 2007).

Pembuktiannya (Diethelm, 2010) jika  $\lambda = 0$  maka diperoleh  $\zeta(t) = E_\alpha(0) = 1$  sehingga  $D^\alpha \zeta(t) = \lambda \zeta(t) = 0$ . Jika  $\lambda \neq 0$  maka (menggunakan notasi  $p_k(t) := t^k$ ;

$$\begin{aligned} D^\alpha \zeta(t) &= D^\alpha \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p_\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} \right] (t) \\ &= I_0^{m-\alpha} D^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n p_{\alpha n}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \right] (t) \\ &= I_0^{m-\alpha} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n D^m p_{\alpha n}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \right] (t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n I_0^{m-\alpha} p_{\alpha n-m}(t)}{\Gamma(1 + \alpha n - m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n p_{\alpha n - \alpha}(t)}{\Gamma(1 + \alpha n - \alpha)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{\alpha n - \alpha}}{\Gamma(1 + \alpha n - \alpha)} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} = \lambda \zeta(t).
\end{aligned}$$

Akibatnya solusi persamaan (2.11) adalah

$$\begin{aligned}
\zeta_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \zeta_1(0) = E_{\alpha} = (\lambda_1 t^{\alpha}) \zeta_1(0), \\
\zeta_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_2)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \zeta_2(0) = E_{\alpha} = (\lambda_2 t^{\alpha}) \zeta_2(0).
\end{aligned}$$

(Ahmed, dkk., 2007)

### Teroema 2.3.3 (Kestabilan lokal Sistem Nonlinear fraksional)

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat stabil asimtotik lokal apabila setiap nilai eigen  $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n)$  pada matriks Jacobi  $J$ , di titik  $\vec{x}^*$  memenuhi kondisi

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  (Petras, 2011).

## 2.4 Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), pemahaman hubungan antara *predator* dan *prey* merupakan dasar utama dalam mempelajari ilmu ekologi. Salah satu komponen penting dalam hubungan tersebut adalah laju *predator* memangsa *prey*. Laju pemangsaan per kapita *predator* terhadap *prey* sering dengan disebut fungsi respon.

**Tabel 2.1** Tipe dan bentuk fungsi respon

Tipe	Bentuk Fungsi Respon $q(x, y)$
Holling tipe I	$cx$
Holling tipe II	$\frac{cx}{r + ex}$
Holling tipe III	$\frac{cx^2}{r + ex^2}$
Beddington-DeAngelis	$\frac{cx}{r + ex + y}$
Ratio-Dependent	$\frac{cx}{ex + y}$
Nicholson-Bailey	$axe^{-by}$

Seiring dengan pengembangan penelitian terhadap model *predator-prey*, diperoleh bentuk umum

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(x) - aq(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= q(x, y)y - \mu y,\end{aligned}\tag{2.15}$$

dengan  $q(x, y)$  menyatakan fungsi respon dan parameter  $a$  menyatakan efisiensi pemangsaan. Fungsi respon menjelaskan perpindahan energi yang terjadi pada tingkat pemangsa. Beberapa tipe dan bentuk fungsi respon yang telah terangkum dalam Tabel 2.1.

## 2.5 Model *Predator-Prey* Dua Spesies

Model *predator-prey* pertama kali dikemukakan oleh Lotka dan Volterra. Model tersebut menggambarkan interaksi antara spesies *predator* (pemangsa) dan spesies *prey* (dimangsa). Misalkan  $X$  menyatakan jumlah populasi *prey* dan  $Y$  menyatakan jumlah populasi *predator*. Laju pertumbuhan *prey*  $\left(\frac{dX}{dt}\right)$  diasumsikan berbanding lurus dengan bertambahnya waktu dan berkurang karena terbatas oleh keberadaan *carrying capacity* dinyatakan dengan  $KX^2$ . Laju



interaksi prey dan predator dinyatakan  $XY$ . Laju pertumbuhan populasi *prey* ( $\frac{dX}{dt}$ ) yaitu

$$\frac{dX}{dt} = X[1 - Y - KX].$$

Populasi *predator* dapat bertahan hidup karena usaha pemangsaan terhadap *prey* dengan laju  $XY$ . Jumlah populasi predator menjadi menurun karena adanya kematian alami secara eksponensial dinyatakan dengan  $DY$ , sehingga laju pertumbuhan populasi *predator* yaitu

$$\frac{dY}{dt} = Y[X - D].$$

Dinamika populasi antara populasi *predator* dan *prey* dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = X[1 - Y - KX]$$

$$\frac{dY}{dt} = Y[X - D]$$

dengan  $K$  adalah parameter yang berkaitan dengan *carrying capacity prey*, sedangkan  $D$  adalah kematian alami predator (Previte dan Hoffman, 2010).

## 2.6 Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Pada tahun 1991 Hastings dan Powell memperkenalkan model rantai makanan *predator-prey* tiga spesies. Populasi *predator-prey* tersebut dibagi menjadi 3 subpopulasi, yaitu populasi *prey* ( $X$ ), populasi *intermediate-predator* ( $Y$ ) dan *top-predator* ( $Z$ ). Populasi *predator* dibagi menjadi dua yaitu *intermediate-predator* dan *top-predator*. Peran populasi *intermediate-predator* adalah menjadi sumber makanan bagi populasi *top-predator*.

### 2.6.1 Laju perubahan populasi *prey*

Populasi *prey* dinyatakan dengan  $X$ . Laju perubahan *prey*  $\left(\frac{dX}{dt}\right)$  pada populasi diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik dengan laju pertumbuhan *prey* sebesar  $R_0$  dan daya dukung lingkungan sebesar  $K_0$ , sehingga laju perubahan populasi *prey*  $\left(\frac{dX}{dt}\right)$  dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dX}{dT} = R_0 X \left[ 1 - \frac{X}{K_0} \right].$$

Pertumbuhan *prey* dipengaruhi oleh interaksi pemangsaan antara *intermediate-predator* dengan *prey*. Laju interaksi ini mengikuti fungsi respon Holling tipe II sebesar  $\frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X}$  dengan laju pemangsaan *intermediate-predator* sebesar  $A_1$  dan laju interaksi *prey* dengan *intermediate-predator* sebesar  $C_1$ .  $B_1$  merupakan tingkat proteksi lingkungan terhadap populasi *prey*. Laju pertumbuhan populasi *prey*  $\left(\frac{dX}{dt}\right)$  dinyatakan dengan

$$\frac{dX}{dT} = R_0 X \left( 1 - \frac{X}{K_0} \right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X}. \quad (2.12)$$

### 2.6.2 Laju perubahan populasi *intermediate-predator*

Populasi *intermediate-predator* dinyatakan dengan  $Y$ . Laju perubahan populasi *intermediate-predator*  $\left(\frac{dY}{dt}\right)$  bertambah karena interaksi pemangsaan antara *intermediate-predator* dengan *prey* sebesar  $\frac{A_1 Y Z}{B_1 + Y}$  dan berkurang karena adanya kematian alami sebesar  $D_1$  dan interaksi dengan *top-predator* sebesar  $\frac{A_2 Y Z}{B_2 + Y}$ .  $B_2$  merupakan tingkat proteksi lingkungan terhadap populasi *intermediate-predator*. Laju perubahan populasi *intermediate-predator*  $\left(\frac{dY}{dt}\right)$  dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dY}{dT} = \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} - \frac{A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_1 Y \quad (2.13)$$

### 2.6.3 Laju perubahan populasi *top-predator*

Populasi *top-predator* dinyatakan dengan  $Z$ . Laju perubahan populasi *top-predator*  $\left(\frac{dZ}{dT}\right)$  bertambah karena adanya laju pemangsaan antara *intermediate-predator* dengan *top-predator* sebesar  $\frac{C_2 A_2 Y Z}{B_2 + Y}$  dan berkurang karena kematian alami sebesar  $D_2$ . Laju perubahan populasi *top-predator*  $\left(\frac{dZ}{dT}\right)$  dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{C_2 A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_2 Z \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.12), (2.13) dan (2.14) terbentuk model *predator-prey* tiga spesies yang dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial dimana semua parameter non negatif, sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} - \frac{A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_1 Y \\ \frac{dZ}{dT} &= \frac{C_2 A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_2 Z \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Hastings dan Powell, 1991)

## 2.7 Model *Predator-Prey* Tiga Spesies dengan Alternatif *Prey*

Pada tahun 2014, Sahoo dan Poria memodifikasi model (2.15). Pengembangan model dilakukan dengan menambahkan efek pemanenan dan alternatif *prey* pada populasi *top-predator*. Laju perubahan populasi *top-predator*  $\left(\frac{dZ}{dT}\right)$  berkurang akibat adanya pemanenan sebesar  $EZ$  dan bertambah karena adanya alternatif *prey* sebesar  $C_2 A_2 Z(1 - A)$ . Alternatif *prey* menyebabkan interaksi antara *top-predator* dan *intermediate-predator* pada laju perubahan populasi *intermediate-predator*  $\left(\frac{dY}{dT}\right)$  berkurang sebesar  $A$  dinyatakan dengan

$\frac{AA_2YZ}{B_2+Y}$ . Oleh karena itu, model Sahoo dan Poria (2014) dapat dituliskan sebagai

berikut

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= R_0X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1A_1XY}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1XY}{B_1 + X} - \frac{AA_2YZ}{B_2 + Y} - D_1Y \\ \frac{dZ}{dT} &= C_2A_2Z \left(\frac{AY}{B_2 + Y} + (1 - A)\right) - D_2Z - EZ\end{aligned}\tag{2.16}$$

dengan

- $X$  = kepadatan populasi *prey*
- $Y$  = kepadatan populasi *intermediate-predator*
- $Z$  = kepadatan populasi *top-predator*
- $E$  = upaya pemanenan *top-predator*
- $R_0$  = laju pertumbuhan populasi *prey*
- $K_0$  = *carrying capacity* populasi *prey*
- $C_1$  = laju interaksi antara populasi *prey* dan *intermediate-predator*
- $C_2$  = laju interaksi antara populasi *intermediate-predator* dan *top-predator*
- $B_1$  = tingkat proteksi lingkungan terhadap populasi *prey*
- $B_2$  = tingkat proteksi lingkungan terhadap populasi *intermediate-predator*
- $A_1$  = maksimal laju pemangsaan *intermediate-predator* kepada *prey*
- $A_2$  = maksimal laju pemangsaan *top-predator* kepada *intermediate-predator*
- $A$  = konstanta makanan tambahan,  $0 < A < 1$
- $D_1$  = laju kematian alami populasi *intermediate-predator*
- $D_2$  = laju kematian alami populasi *top-predator*

Sistem persamaan (2.16) diskalakan untuk memudahkan dalam teknis perhitungan. Oleh karena itu dipilih parameter-parameter penentu yaitu  $x =$

$$\frac{X}{K_0}, y = \frac{C_1Y}{K_0}, z = \frac{C_1Z}{C_2K_0}, t = R_0T, a_1 = \frac{A_1K_0}{R_0B_1}, a_2 = \frac{A_2K_0C_2}{B_2R_0C_1}, b_1 = \frac{K_0}{B_1}, b_2 = \frac{K_0}{B_2C_1}, c =$$

$$\frac{C_1B_2}{K_0}, d_1 = \frac{D_1}{R_0}, \hat{d}_2 = \frac{D_2}{R_0}, e = \frac{E}{R_0}, \text{ dimana } a_1 = \frac{A_1K_0}{R_0B_1} > b_1d_1 = \frac{K_0D_1}{B_1R_0} \text{ atau } A_1 > D_1 \text{ dan}$$

$$a_2 = \frac{A_2K_0C_2}{B_2R_0C_1} > b_2d_2 = \frac{K_0D_2}{B_2C_1R_0} \text{ atau } A_2C_2 > D_2 \text{ sehingga didapatkan sistem}$$

persamaan baru sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{a_1xy}{1+b_1x}, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{a_1xy}{1+b_1x} - \frac{a_2Azy}{1+b_2y} - d_1y, \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{a_2Azy}{1+b_2y} + a_2zc(1-A) - (e + \hat{d}_2))z
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model (2.17) disajikan pada Tabel 2.2.

(Sahoo dan Poria, 2014)

**Tabel 2.2** Syarat Eksistensi dan Kestabilan Titik Keseimbangan Orde Satu

Titik tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1(0,0,0)$	-	Tidak stabil	-
$E_2(1,0,0)$	-	Stabil	(i). $\frac{\alpha_1}{1+b_1} < d_1$ (ii). $A > 1 - \frac{d_2+e}{a_2c}$
$E_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{0})$	$\alpha_1 > (b_1 + 1)d_1$	Stabil	(i). $\frac{\alpha_2 A \bar{y}}{1+b_2 \bar{y}} + \alpha_2 c(1 - A) < d_2 + e$ (ii). $\sigma_i > 0, i = 1,2$
$E_4(x^*, y^*, z^*)$	(i). $\alpha_2 c(1 - A) < d_2 + e$ (ii). $\alpha_2 A > b_2(d_2 + e - \alpha_2 c(1 - A))$ (iii). $\frac{\alpha_1 x^*}{1+b_1 x^*} > d_1$ (iv). $Q^2 > 4PR$ (v). $Q < 0$	Stabil	$\frac{\alpha_1 x^*}{1 + b_1 x^*} < \frac{\alpha_2 A z^*}{(1 + b_2 y^*)^2} + d_1$